Fach Physik und Anwendungen der Mathematik
Klassen 5C, 5P

Dauer der Prüfung:	4 Std. (240 Minuten)
Erlaubte Hilfsmittel:	Formeln und Tafeln, Fundamentum, Taschenrechner TI 83 plus
Vorbemerkungen:	Jedes der vier Themen ist auf einem neuen Blatt zu beginnen. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein. Antworten ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden. Gesamtpunktzahl: 56 Punkte. Für die (aufgerundete) Note 6 genügen 47½ Punkte.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Spezielle Relativitätstheorie 14 Punkte (4 + 1 + 2 + 1 + 3 + 3)

Zwei Raumschiffe A und B bewegen sich in genau entgegengesetzte Richtungen. Ihre Geschwindigkeiten bezüglich der Erde betragen $v_A = 0.4c$ nach rechts respektive $v_B = \frac{1}{3}c$ nach links.

1.1 a) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm und tragen Sie die Weltlinien der beiden Raumschiffe ein. Verwenden Sie für die Einheiten im Ruhesystem der Erde 5cm als 1Ls resp. 1s. Platzbedarf: ganze A4-Seite, t-Achse von -1s bis +3s, x-Achse von -1Ls bis +2Ls.

b) Berechnen Sie die Einheiten auf den Achsen der Systeme der Raumschiffe A und B. Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms, wie lang für die Besatzung des einen Raumschiffs ein Meter im anderen Raumschiff ist und umgekehrt.

Im Raumschiff A wird zur Zeit $t_A = 1s$ ein Elektron mit $v_e = 0.5c$ in Bewegungsrichtung des Raumschiffs ausgesandt.

1.2 Zeichnen Sie die Weltlinie dieses Elektrons ins Minkowski-Diagramm aus Aufgabe 1.1 ein.

1.3 Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Elektrons bezüglich des Raumschiffs B rechnerisch.

Ein Raumschiff C bewegt sich radial von der Erde weg. Es verwendet als Positionsleuchten Wasserstofflampen, welche die Spektrallinien H_α, H_β, H_γ und H_δ emittieren. Ein Beobachter an der Erdoberfläche analysiert das von den Positionsleuchten empfangene Licht. Er erkennt Spektrallinien rotverschoben bei 519nm, 549nm und bei 615nm.

1.4 Weshalb sieht der Beobachter nur 3 der 4 Spektrallinien? Es wird keine Rechnung erwartet.

1.5 Bestimmen Sie aus einer der beobachteten Wellenlängen die Geschwindigkeit des Raumschiffs relativ zur Erde.

Für Geschwindigkeiten, welche deutlich unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen, kann der Taschenrechner den Term $\sqrt{1-\beta^2}$ nicht von 1 unterscheiden. In diesem Fall hilft die Näherung $\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{1}{2}\cdot x$.

1.6 Berechnen Sie für die Funktion $f(x)=\sqrt{1-x}$ die ersten 4 Glieder der Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$. Hinweis: Die erwähnte Näherung sollte dabei bestätigt werden.

Aufgabe 2: Stehende Wellen im Rubens'schen Flammenrohr 14 Punkte (1½ + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 3½)

In einem Rubens'schen Flammenrohr bildet sich eine stehende Welle aus.

2.1 Was muss für zwei Wellen gelten, damit sie einander zu einer stehenden Welle überlagern?

Die Gleichung der ersten Welle laute $y_1(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx)$. Geben Sie die Gleichung der zweiten Welle an!

Ein Rubens'sches Flammenrohr ist 90.0cm lang und ist an beiden Enden verschlossen. An der Oberseite sind im Abstand von je 1.50cm 59 kleine Löcher angebracht. Das erste und das letzte Loch sind jeweils 1.50cm von den Enden des Rohrs entfernt.

2.2 Das Rohr wird mit einem Ton der Frequenz f = 780Hz beschallt. Bei den Löchern Nr. 15, 30 und 45 stellen sich Knoten ein.
Berechnen Sie daraus die Werte für ω, k und für die Schallgeschwindigkeit c im Rohr.

2.3 Bestimmen Sie alle dreistelligen Frequenzen f (also 100Hz ≤ f < 1000Hz), bei denen bei einer Schallgeschwindigkeit von c = $342\,^{m}/_{s}$ an mindestens einem der Löcher exakt ein Knoten zu liegen kommt.

Es seien α und β zwei Winkel zwischen 0° und 90°. Für sie werden die beiden folgenden Vektoren definiert:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.4 Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, sowie den Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Beschriften Sie auch die Winkel α und β.

2.5 Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{c}$.

2.6 Berechnen Sie den Betrag von $\vec{c}$ auf zwei verschiedene Arten und beweisen Sie damit das Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

2.7 Überlagern Sie die beiden Wellenfunktionen aus Aufgabe 2.1. Die beiden Wellen sollen dabei keine Phasenverschiebung zueinander aufweisen.
Vereinfachen Sie den Term mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$.
Erklären Sie an Ihrem Resultat die Entstehung von Knoten.

Aufgabe 3: komplexe Zahlen und komplexe Funktionen 14 Punkte (1½ + 5 + 2½ + 5)

3.1 Berechnen Sie "von Hand" den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ der beiden Zahlen $z_1 = 2 - 11i$ und $z_2 = -7 + i$.

Geben Sie das Resultat in Normalform an.

Für die Aufgaben 3.2 und 3.3 ist die ganze lineare Funktion $w(z) = (-2 + i) \cdot z + 6 + 10i$ gegeben.

3.2 Gegeben ist das Dreieck $A(-1 + 5i)$, $B(-2.5 + 1.5i)$, $C(1 + 2i)$.

a) Berechnen Sie die zu den Bildpunkten gehörenden Zahlen A', B' und C'.

b) Zeichnen Sie in der Gauss'schen Zahlenebene Original- und Bildfigur.

c) Berechnen Sie das Zentrum Z_0, den Drehwinkel α und den Streckfaktor k der Abbildung w(z).

3.3 Bestimmen Sie alle Zahlen z, für welche $w(z) = z^2$ gilt.

3.4 Konstruieren Sie auf dem Beiblatt das Bild des Kreissektors unter der Reziprokfunktion $w(z) = \frac{1}{z}$.

Aufgabe 4: schiefe Ebene und Trägheitsmoment 14 Punkte (5 + 2 + 3 + 1½ + 2½)

Eine Metallkugel mit Radius r = 3.90cm, Masse m = 2.00kg und homogener Dichte beginnt aus der Ruhelage eine 6.40m lange, gleichmässig mit dem Neigungswinkel ε = 5.00° geneigte Rampe herunter zu rollen. Die Rollreibung und der Luftwiderstand sollen vernachlässigt werden.

4.1 Berechnen Sie

a) das Drehmoment M, welches auf die Kugel wirkt,

b) die Rotationsbeschleunigung α, welche auf die Kugel wirkt,

c) die Bahngeschwindigkeit v, welche der Mittelpunkt der Kugel am unteren Ende der Rampe aufweist.

Der rechts abgebildete "Doppelkörper" entsteht durch Rotation der Funktion $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}$ (schwarzer Graph) um die x-Achse (Einheit: cm. Winkel im <u>Bogenmass</u>!).

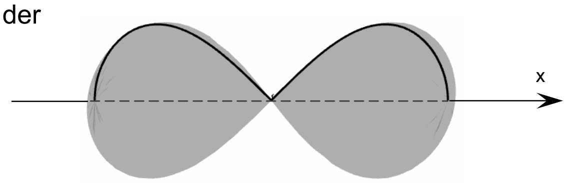


Abbildung ist <u>nicht</u> massstäblich!

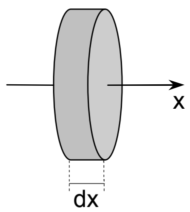
Obwohl die linke und rechte Hälfte einander bei x = 0 bloss in einem Punkt berühren, soll der "Doppelkörper" als zusammenhängend und starr aufgefasst werden. Seine Dichte ρ ist homogen.

4.2 Geben Sie die Länge L (in Richtung der x-Achse) und die maximale Dicke D (quer zur x-Achse) des Doppelkörpers an (auf 3 Kommastellen genau).

4.3 Weisen Sie durch Integration von Hand nach, dass das Volumen des Doppelkörpers $V = 2\pi^2$ beträgt.

Es soll das Trägheitsmoment J des Rotationskörpers berechnet werden.

4.4 Zeigen Sie, dass für einen Zylinder mit der infinitesimalen Dicke dx in der abgebildeten Lage die Formel aus der FoTa in $dJ_S = \frac{1}{2} \pi \rho r^4(x) dx$ umgeformt werden kann.



4.5 Berechnen Sie mit der Formel aus Aufgabe 4.4 das Trägheitsmoment des Doppelkörpers, wenn er aus Messing besteht und wenn seine Drehachse die x-Achse ist. Alle Funktionen des Taschenrechners dürfen verwendet werden.

Beiblatt zu Aufgabe 3.4 *Name:* ______________________________